مشكلة تقدير الاتجاه العام الأسى لمتغير اقتصادى يأخذ قيما موجبة وسالبة

د. على نصار *

ملخص

Calculating the Average Annual Growth Rate for an Economic Variable Changing its Sign.

Dr. Ali Nassar

Some economic variables fluctuate between positive and negative values, and the question is how to calculate and compare the hidden values of growth rates. Common methods assume simple exponential trend, and then use logarithms, which make sense only for positive values (this is either for calculations which start from two readings, or for the numerical approach of least squares of multiple readings).

Because the values in a simple exponential trend cann't shift in sign, the given solution represents a trial to calculate (and compare) average annual growth rates from a modified exponential function. The first step in this solution relies on reaching the proper transformation for the actual data.

* مدير مركز الأساليب التخطيطية – معهد التخطيط القومى – القاهرة.

١- المشكلة

سواء فى تحليل تطور بعض المتغيرات أم فى نمذجة هذا التطور، اعتدنا قياس عدد من المؤشرات من أكثرها شيوعاً معدلات نمو هذه المتغيرات أو اتجاهاتها العامة الأسية البسيطة. وفى المجال الاقتصادى قد يتطور الأداء الذى تمثله الظاهرة من قيم سالبة إلى أخرى موجبة أو العكس. وعلى سبيل المثال وليس الحصر، قد نلاحظ ذلك فى قيم صافى التعامل مع العالم الخارجى، وعجز الموازنات العامة، والادخار، وحتى القيمة المضافة فى قطاعات ببلدان بعينها، .. وهكذا. وعندما يحدث ذلك يواجه الباحث مشكلة فى حساب معدلات النمو أو الاتجاهات العامة الأسية للمتغيرات موضع التحليل. وهذه هى المشكلة التى سنحاول تقديم حل لها فى هذه الورقة.

وينبنى قياس قيمة متوسطة عبر فترة زمنية لمعدل النمو على افتراض أن الظاهرة تتطور فى شكل دالة أسية بسيطة Simple Exponential Function أى تأخذ الشكل البسيط :

$$y_t = y_0 b^t ،$$

ومنها

$$(\Delta y_t / y_{t-1}) = r ،$$

$$(y_n / y_0)^{1/n} = b$$

حيث $r = b - 1$ هو معدل النمو السنوى المتوسط، وحيث t الزمن.

$t = 0 , 1 , ... n$ ، وحيث n = عدد الفترات (أو السنوات) التى تنقضى بين بداية السلسلة ونهايتها.

ومع هذا الافتراض حول التطور فى شكل دالة أسية بسيطة. يمكننا قياس قيمة معدل النمو المتوسط r ، طالما كانت قيم الظاهرة موجبة فقط.

فلو بدأنا بقيمتين فقط، نفترض أن الأولى قيمة ابتدائية y_0 والأخرى نهائية y_n يفصل بينهما n من السنين، يكون معدل النمو :

$$r = (y_n / y_0)^{1/n} - 1$$

ونحتاج لاستخدام اللوغاريتمات (التي لا تتعامل مع قيم سالبة) في قياس r

$$\ln (1 + r) = 1/n (\ln y_n - \ln y_0)$$

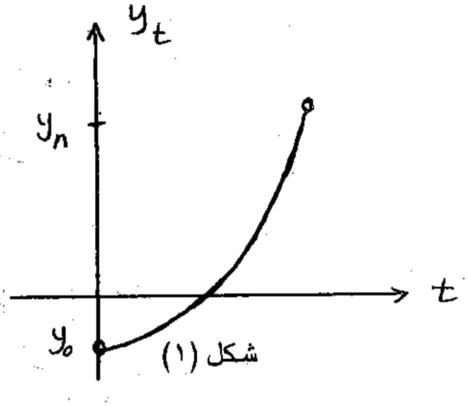
أما لو بدأنا بعدة قراءات (لنقيس منها الدالة الأسية البسيطة التي تعبر عن هذه القراءات أفضل تعبير، وبالتالي نحسب منها معدل النمو المتوسط) فإننا نحتاج تحويل الدالة الأسية إلى أخرى خطية باستخدام اللوغاريتمات (التى لا تتعامل مع قيم سالبة).
أى استخدام طريقة المربعات الصغرى في حساب b ، y_0 من خــلال المعادلة :

$$\ln y_t = \ln y_0 + t . \ln b$$

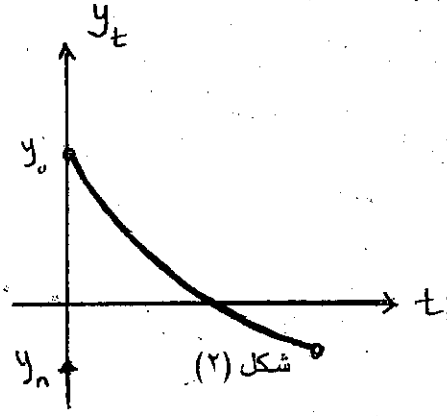
وينبه هنا إلى أن أى أسلوب تقريبى (لحساب معدل النمو المتوسط فى هذه الحالة) يتفادى استخدام اللوغاريتمات هو أسلوب خاطئ. ويزداد الخطأ (حتى فى حالة كون كل البيانات موجبة) مع كبر النمو المتوقع من خلال الحساب.

٢- فكرة الحــل

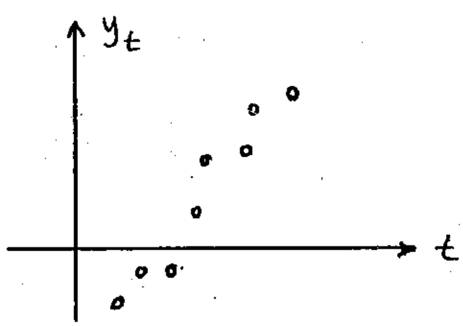
أحياناً تبدو لنا بعض الظواهر فى شكل انتشارها البيانى موحية بأفكار غير صحيحة، كما نرى فى الأشكال البيانية من (١) إلى (٤) ، حيث يعبر الشكلان (١) ، (٢) عن النمو بين قراءتين، والشكلان (٣) ، (٤) عن النمو عبر عدة قراءات.



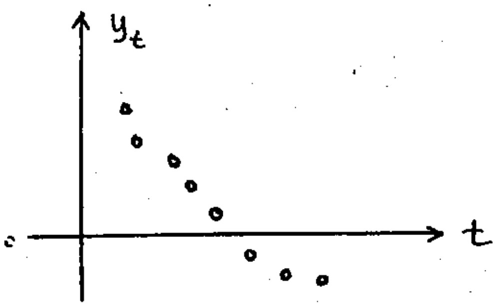
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

إن إشارات القراءات في الأشكال الأربعة تتبدل ما بين الموجب والسالب عبر الزمن. وقد يبدو لأول وهلة أنه يمكن تمثيل هذه القراءات بدوال أسية بسيطة، بينما الدوال الفعلية الممثلة لهذه القراءات هي دوال أسية غير بسيطة.

فالدالة الأسية البسيطة لا تسمح بأن تتغير فيها إشارات القراءات ما بين السالب والموجب أى أنها لا يمكن أن تتقاطع مع المحور الأفقى t . فلا يوجد أى معنى لكون $b^t = 0$ ، $y_t = y_0$ سواء أكان المقصود تلاشى y_0 أو تلاشى b .

إذن فعلينا البحث عن أسلوب آخر، أو دالة أسية أخرى غير بسيطة للتعبير عن هذا الشكل الأسى لتطور الظاهرة، التى تتغير قيمها من موجبة إلى سالبة أو العكس.

وتتمثل فكرة الحل في اللجوء إلى التحويل المناسب Transformation للتوصل إلى معدلات النمو المتضمنة فى أشكال الانتشار البيانية. وبالتالى التعرف على الدالة الأسية الصحيحة التى يمكن من خلالها التوقع الداخلى Interpolation والخارجى Extrapolation للقيم النظرية للظاهرة عبر الزمن.

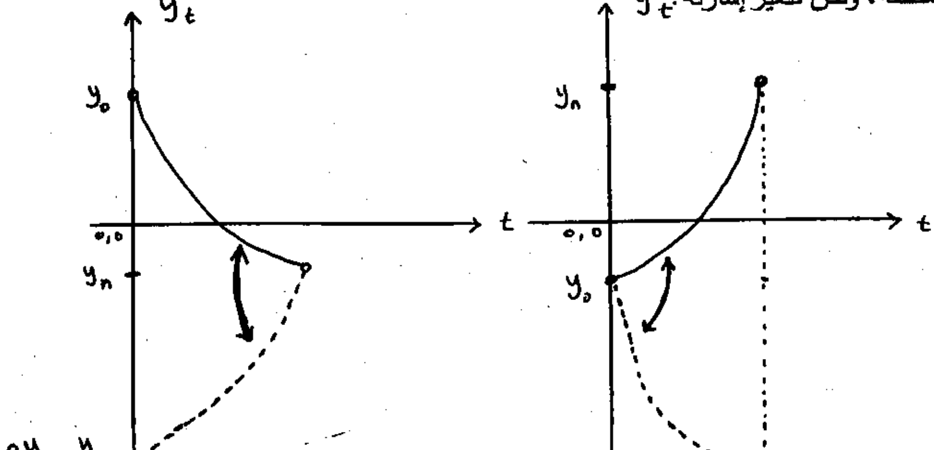
وسوف يتضح أنها دالة أسية غير بسيطة، أودالة أسية معدلة Modified Exponential .

ولكن علينا التأكد من اختيار التحويل المناسب. وعلى سبيل المثال فإن مجرد إزاحة كل القراءات بقيمة ثابتة C_1 أو C_2 مثلاً لتتواجد كلها فى المنطقة الموجبة من شكل الانتشار البيانى تؤدى إلى نتيجة خاطئة، ويختلف قياسنا مع مقدار الإزاحة C_1 أو C_2 ، حيث :

$$(1 + r)^n \neq \frac{y_n + C_1}{y_0 + C_1} \neq \frac{y_n + C_2}{y_0 + C_2}$$

٣- تقدير النمو الأسى بين قيمتين إحداهما سالبة والأخرى موجبة :

لنفترض أن القيمة الأولى هى y_0 ، والقيمة الثانية هى y_n . فى الشكل (٥) تبدأ الظاهرة بقيمة سالبة، وتنتهى بقيمة موجبة. وفى الشكل (٦) يحدث العكس، حيث تبدأ الظاهرة بقيمة موجبة وتنتهى بقيمة سالبة. ويتمثل الحل المقترح فى حالة وجود قيمتين فقط للمتغير y فى إجراء تحويل يجعل القيم كلها سالبة. ويتم ذلك عن طريق إدارة المنحنى الأسى حول النقطة السالبة، أى تثبيتها. وهكذا يبقى معدل النمو ثابتاً فى قيمته المطلقة، ولكن تتغير إشارته y_t



شكل (٦) شكل (٥)

—— : المنحنى الأصلى

..... : المنحنى المعدل

ومن ملاحظة الدوران أى التحويل المشار إليه أعلاه، نجد أن معدل النمو يتخذ القيمة التالية :

$$(2)\quad -r = [\,(2\,y_0 - y_n)\,/\,y_0\,]^{1/n} - 1$$

وذلك فى حالة الشكل (٥)، حيث التطور من قيمة سالبة إلى أخرى موجبة

$$(3)\quad -r = [\,y_n\,/\,(2\,y_n - y_0)\,]^{1/n} - 1$$

للقيمة فى حالة الشكل (٦)، حيث التطور من قيمة موجبة إلى أخرى سالبة.

ومما تقدم يمكن استنتاج الصورة العامة (للحالتين) على النحو التالى :

$$(4)\quad b = 1 + r = 2 - [\,2 - (\frac{y_n}{y_0})^k\,]^{k/n}$$

وتستعمل قيم k لمجرد تغير الاشارات حسب الحالة، حيث : $K = |\,y_n\,|\,/\,y_0$

حيث $|\,y_n\,|$ تعنى القيمة المطلقة (أى بإهمال الإشارة) للمتغير y عند النقطة الزمنية n .

وتصبح الدالة الأسية غير البسيطة للاسقاط الداخلى والخارجى :

$$(5.a)\quad y_t = y_0 + a\,(1 - b^t)$$

أو

$$(5.b)\quad y_t = c - ab^t$$

حيث :

$$b = 1 + r\ ,\quad c = y_0 + a\ ,\ a = \frac{y_n - y_0}{1 - b^n}$$

وهذه الدالة تقطع المحور الأفقى $(y = 0)$ عند الزمن (t) الذى يمكن معرفته من المعادلة $t\,.\,\ln b = \ln\,(\,y_0 + a\,) - \ln a$

كما تقطع المحور الرأسى $(t = 0)$ عند y_0 .

وينبغى الانتباه إلى أننا لا نستطيع الحديث عن معدل نمو سنوى متوسط وثابت للظاهرة y_t ، ولكننا نستطيع بدلاً عن ذلك أن نشير إلى معدل نمو سنوى متوسط لظاهرة بديلة هى $(y_t - c)$ وهذا المعدل هو تحديداً r ، أى معدل النمو السنوى المتوسط لقيم البعد عن الثابت c .

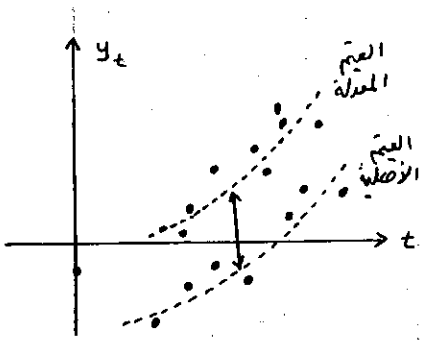
$$c = \left(\frac{y_n - y_0 b^n}{1 - b^n}\right)$$

ويمكن الاستفادة من r المحسوبة هنا فى مقارنات لقيم مناظرة محسوبة لبلدان أخرى أو لفترات زمنية أخرى لنفس البلد، طالما أن قيم المتغير المقارن متبدلة الإشارات.

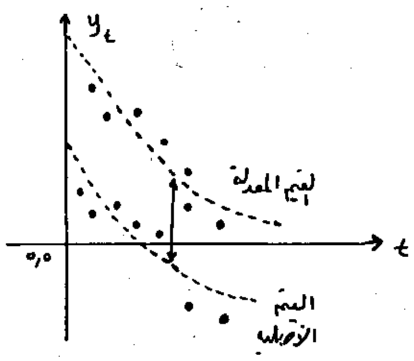
وتجدر ملاحظة أنه فى هذه الدالة الأسية غير البسيطة : $y_n \neq y_0 b^n$

٤- تقدير النمو الأسى من مجموعة قراءات متبدلة الإشارة

نفترض أن القيم التى يأخذها المتغير هى $y_1 , y_2 , y_3 , \ldots\ldots y_n$ ، حيث تكون بعض هذه القيم موجبة وبعضها الآخر سالبة. وبالطبع لابد هنا من اللجوء لطريقة المربعات الصغرى من أجل تقدير المعادلة غير البسيطة للنمو الأسى للمتغير y ، وذلك بعد إجراء التحويل المناسب للقيم. وسوف يتم التحويل بإزاحة القيم على النحو الذى تصبح معه كلها قيماً موجبة، كما يظهر فى الشكلين (٧) و (٨).



شكل (٧)



شكل (٨)

إذن نبدأ عملية التحويل هنا كإزاحة إلى قيم كلها موجبة، وذلك تمهيداً للوصول إلى قياس للدالة الأسية غير البسيطة. ويتم ذلك بأن نأخذ قيمة ابتدائية مفترضة $\underline{y}$ نعتبرها من شكل الانتشار البياني هى أقرب نقطة للمكان الذى سوف يتقاطع فيه المنحنى النظرى المستهدف للدالة y_t مع المحور الرأسى.

وسوف تكون هذه القيمة سالبة في الشكل (٧) وموجبة في الشكل (٨).

وحتى تتم الإزاحة إلى قيم كلها موجبة نحسب من شكل الانتشار القيمة $\underline{c}$ التى تجعل : $Z_t = y_t + \underline{c} . \underline{y}$ حيث $Z_t > 0$.

أى أن الإزاحة $\underline{c} . \underline{y}$ ثابتة لجميع قيم y_t ، لنحصل على سلسلة جديدة كلها موجبة من قيم Z_t .

وبذلك يمكن اللجوء لطريقة المربعات الصغرى لقياس الدالة الأسية البسيطة التى تعبر أفضل تعبير عن القراءات Z_t عبر الزمن. أى نقيس $\hat{Z}_0 , \hat{b}$ فى الدالة النظرية : $\hat{Z}_t$

$$(6)\ \hat{Z}_t = Z_0 \ . b^t$$

وبالطبع فإن هناك علاقة ينبغى أن نبحث عنها، وهى الدالة الأسية غير البسيطة y_t التى تربط بين القيم الأصلية y_t ، والقيم النظرية $\hat{Z}_t$. ويمكن أن نحسب هذه العلاقة بطريقة المربعات الصغرى أيضاً ، أى نحسب $\hat{A} , \hat{B}$ للدالة :

$$(7)\ y_t = A\ \hat{Z}_t + B$$

ومن القيم المحسوبة لكل من $\hat{Z}_0 , \hat{b} , \hat{A} , \hat{B}$ بطريقة المربعات الصغرى، يمكن أن نحصل على العلاقة :

$$(8)\ \hat{y}_t = \hat{A} \ . \ \hat{Z}_0 \ . \ b^t + \hat{B}$$

ويمكننا تحسين قياسنا لهذه الدالة الأسية غير البسيطة من خلال مراجعة للإزاحة التى تمت، وعلى الأقل بالتأكد من الشرط التالى : $(9)\ \hat{y}_0 = \hat{A} \ . \ \hat{Z}_0 + \hat{B}$

ولاشك أن ذلك يعطينا مدخلاً هاماً لتحسين النتائج من خلال المقارنة بين القيمتين $\underline{y}$ و y_0 وبالتعويض في الدالة y_t بقيمة y_0 (بدلاً من Z_0 لمراجعة الشرط)، نجد أن :

$$(10 . a)\quad \hat{y}_t = \hat{y}_0 . b^t + B (1 - b^t)$$

أو

$$(10 . b)\quad \hat{y}_t = B + C . b^t$$

وحيث : $C = \hat{y}_0 - B$

والدالة (10 . a) أو (10 . b) تقطع المحور الأفقي $y = 0$ عند الزمن (t)، المحسوب من المعادلة :

$$t . \ln b = \text{lin } B - \text{lin } (B - \hat{y}_0)$$

كما أنها تقطع المحور الرأسى ($t = 0$) عند $y_t = y_0$.

ويحتوى ملحق الورقة اقتراحاً باختصار وتبسيط خطوات الحل فى حالة متغير متعدد القيم مع تبدل إشاراتها.

– ومن المهم الانتباه إلى عدم وجود معدل نمو سنوى متوسط وثابت للظاهرة y_t ، وأننا نستطيع بدلاً من ذلك أن نشير إلى معدل نمو سنوى متوسط لظاهرة بديلة هى $y_t - B$. وهذا المعدل هو تحديداً r ، أى معدل النمو السنوى المتوسط لقيم البعد عن الثابت B المحسوب باستخدام طريقة المربعات الصغرى. ويمكن الاستفادة من r المحسوبة هنا فى مقارنات لقيم مناظرة محسوبة لبلدان أخرى أو لفترات زمنية أخرى لنفس البلد، طالما أن قيم المتغير متبدلة الإشارات. والشكلان (٩) و (١٠) يمثلان استعراضاً للحالتين موضع التحليل بمثال عددى.

ملحق

يمكننا اختصار وتبسيط خطوات حساب الدالة الأسية المركبة فى حالة تعدد القراءات مع تبدل الإشارة على النحو التالى :

ليكن المتغير المستقل فى الدالة الأسية هو الزمن :

$$t = 1, 2, 3, ..., n$$

لنستفيد من العلاقات التالية

$$\sum t = n (n + 1)/2 ,$$

$$\sum t^2 = n (n + 1) (2n + 1)/6$$

$$n\sum t^2 - (\sum t)^2 = n^2 (n^2 - 1)/12$$

الآن الدالة الأسية البسيطة التى نحسبها من خلال الإزاحة $Z_t = y_t + \underline{c} . \underline{y}$ ، هى :

$$Z_t = Z_0 b^t$$

ويمكن أن نستفيد من العلاقات التالية في حالة $b > 1$:

$$\sum Z_t = Z_0 b (b^n - 1) / (b - 1)$$

$$\sum Z_t^2 = Z_0^2 b^2 (b^{2n} - 1) / (b^2 - 1)$$

كما يمكن أن نستفيد من العلاقات المناظرة لمجموع المتوالية الهندسية فى حالة $b < 1$. والنتائج التالية لن تتغير سواء كانت $b < 1$ أو كانت $b > 1$.

ثم تأتى خطوات الحساب المبسطة على النحو التالى :

$$\text{lin } b = \frac{1}{n (n^2 - 1)} [12 \sum (\text{lin } Z_t) . t - 6 (n + 1) \sum (\text{lin } Z_t)]$$

$$\text{lin } Z_0 = \frac{1}{2n} [2 \sum (\text{lin } Z_t) - n (n + 1) (\text{lin } b)]$$

ومنها نحسب قيم Z_0 , b، ثم نستعمل هذه القيم للوصول إلى :

$$S = Z_0\, b\, (b^n - 1) / (b - 1)$$

$$B = (b + 1)\, [\, n. \sum y_t Z_t - S. \sum y_t\,] / S. [\, nZ_0 b\, (b^n + 1) - S. (b + 1)\,]$$

$$A = \frac{1}{n} [\, \sum y_t - B\,.\, S\,]$$

$$y_0 = Z_0\, A + B$$

وأخيراً نحصل على الدالة الأسية المركبة :

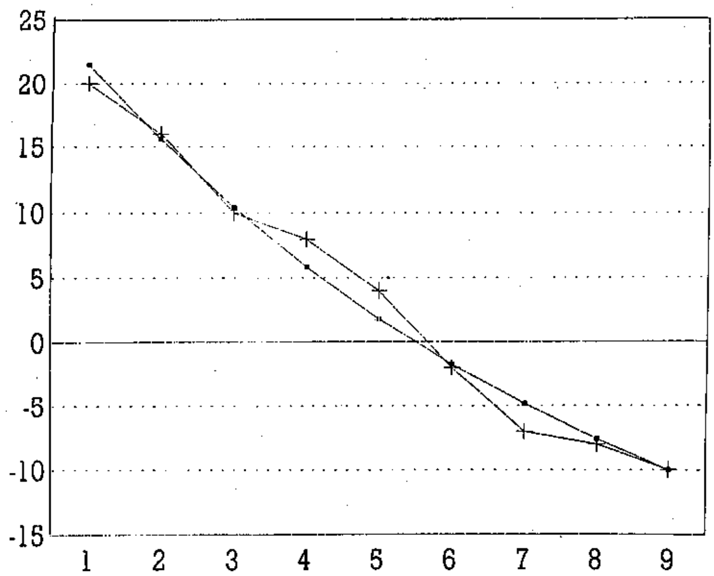
$$y_t = y_0\,.\, b^t + B\,.\, (1 - b^t)$$

ويمكن تتبع خطوات الحل باستعمال الخريطة وشكل التدفقات (Flow Chart) المرفقين.

$\subseteq = 1.1$, $y = 26$

$Z_0 = 57.4013$, $b = 0.8805$

$A = 0.9760$, $B = -27.8245$, $y_0 = 28.2000$



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Series 1	21.502	15.605	10.413	5.8418	1.8169	-1.7266	-4.8467	-7.5937	-10.012
Series 2	20	16	10	8	4	-2	-7	-8	-10

شكل (٩)

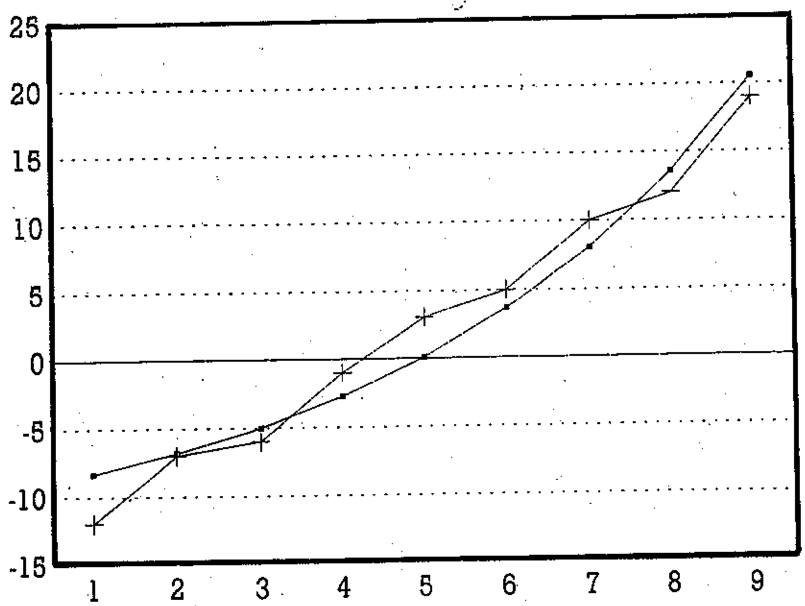
السلسلة (١) تعبر عن القيم المقدرة للمتغير y_t (■-■-■)

السلسلة (٢) تعبر عن القيم الأصلية للمتغير y_t(+ + +)

$\subseteq = 1.1$, $y = 26$

$Z_0 = 57.4013$, $b = 0.8805$

$A = 0.9760$, $B = -27.8245$, $y_0 = 28.2000$



Series 1	-8.27936	-6.83022	-5.01813	-2.75217	0.08132	3.62450	8.06513	13.5954	20.5234
Series 2	-12	-7	-6	-1	3	5	10	12	19

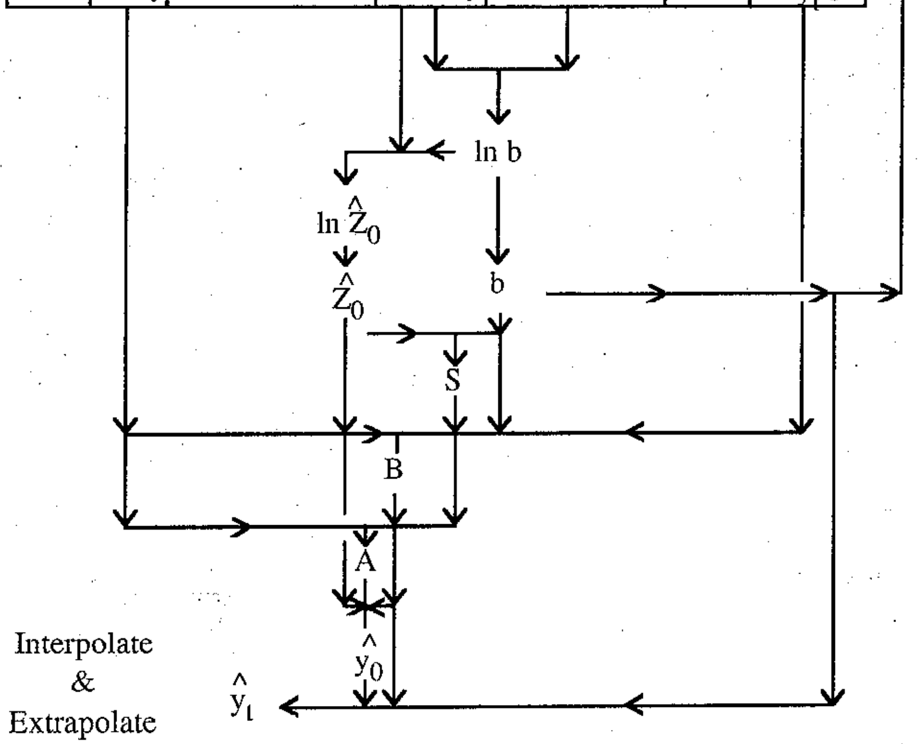
شكل (١٠)

السلسلة (١) تعبر عن القيم المقدرة للمتغير y_t (■-■-■)

السلسلة (٢) تعبر عن القيم الأصلية للمتغير y_t(+ + +)

خريطة حساب معدل النمو الأسى لمتغير متعدد القيم ومتبدل الإشارات

t	y_t	$Z_t = y_t - \underline{C} . \underline{y}$	$\ln Z_t$	$(\ln Z_t) . t$	b^t	$y_t b^t$
1	y_1	Z_1	$\ln Z_1$	$\ln Z_1$	b	$y_1 b$
2	y_2	Z_2	$\ln Z_2$	$(\ln Z_2) . 2$	b^2	$y_2 b^2$
3	y_3	Z_3	$\ln Z_3$	$(\ln Z_3) . 3$	b^3	$y_3 b^3$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
n	y_n	Z_n	$\ln Z_n$	$(\ln Z_n) . n$	b^n	$y_n b^n$
	Σy_t		$\Sigma \ln Z_t$	$\Sigma (\ln Z_t) t$		$\Sigma y_t b^t$



شكل تدفقات لتوضيح خطوات حســـــاب

Start

قراءة عدد المشاهدات

(n)

قراءة المشاهدات

y_t , $t = 1 , \ldots , n$

تحويل قيم المشاهدات y_t

لتصبح كلها موجبة

ولتكن Z_t ، حيث :

$Z_t = y_t + \underline{c} . \underline{y} . > 0$

قياس معلمات الدالة الأسية التقديرية والمقترحة للتعبير عن القراءات Z_t

عبر الزمن (t)

باستخدام العلاقات التالية :

$$\ln b = \frac{1}{n\,(n^2 - 1)} \left[12 \sum (\ln Z_t) . t - 6\,(n + 1) \sum (\ln Z_t) \right]$$

$$\ln \hat{Z}_0 = \frac{1}{2n} \left[2 \sum (\ln Z_t) - n\,(n + 1)\,(\ln b) \right]$$

ومنها يتم حساب $\hat{Z}_0$, b كالآتى :

$$b = \exp (\ln b)$$

$$\hat{Z}_0 = \exp (\ln \hat{Z}_0)$$

(A)

A

لإيجاد الدالة التقديرية للمشاهدات الأصلية y_t فإن العلاقة التالية

$$\hat{y}_t = A . \hat{Z}_t + B$$

تستخدم للربط بين قيم $\hat{Z}_t$ ، $\hat{y}_t$.

والعلاقات التالية تستخدم لتقدير قيمة B , A :

$$S = \hat{Z}_0 \, b \, (b^n - 1) / (b - 1)$$

$$B = (b + 1) \, [n . \Sigma \, y_t \hat{Z}_t - S. \Sigma \, y_t] / S . [n \hat{Z}_0 \, b \, (b^n + 1) - S . (b + 1)]$$

$$A = \frac{1}{n} \, [\, \Sigma \, y_t - B . S \,]$$

وبالتعويض عن قيمة $\hat{Z}_t = \hat{Z}_0 . b^t$

وعن قيمة $\hat{y}_0 = A \, \hat{Z}_0 + B$

نحصل على الشكل النهائى للدالة y_t

حيث $\hat{y}_t = \hat{y}_0 . b^t + B \, (1 - b^t)$

طباعة النتائج

Stop